# Schaltalgebra und Lagrange-Interpolation

Franz Pauer und Florian Stampfer (Universität Innsbruck)

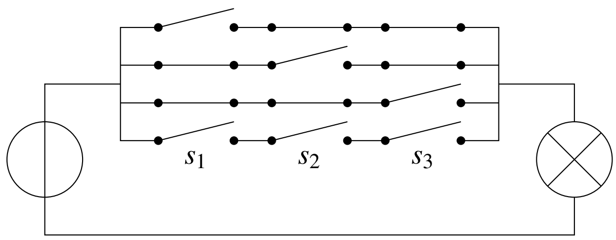
In diesem Beitrag wird gezeigt, wie ein einfaches Problem der Elektrotechnik (Verlegung der Leitungen für eine Lampe mit drei Schaltern) mit algebraischen Methoden gelöst werden kann. Grundlegend dazu ist die Strategie, die bereits Euklid zur Lösung ganzzahliger linearer Gleichungen und Lagrange für die Interpolation mit Polynomfunktionen verwendet haben: „Löse zuerst einfache Aufgaben desselben Typs und baue daraus eine Lösung des ursprünglichen Problems zusammen". Wie in vielen anderen Situationen erweist sich auch hier das Rechnen mit Funktionen als wichtiges Hilfsmittel, um das Problem zu lösen und die Vorgangsweise zu verstehen. Die vorgestellte Methode kann nicht nur für Probleme des Wohnbaus, sondern in vielen anderen Kontexten verwendet werden: zum Beispiel für Schaltungen mit elektronischen Bauteilen in einem Auto oder zum Bau von Abstimmungsmaschinen. Schaltalgebra kommt in Lehrplänen der Höheren Technischen Lehranstalten vor. Mit diesem Thema können nicht nur interessante Anwendungen der Mathematik aufgezeigt werden, sondern auch aus dem Schulunterricht bekannte Methoden und Lösungsstrategien in einem neuen Kontext wiederholt werden. Weiters kann damit verdeutlicht werden, dass es für ein Problem mehrere sinnvolle Lösungen geben kann.

## 1. Eine Lampe mit drei Schaltern

Wir werden in diesem Beitrag erklären, wie das folgende Problem (mit einfachen Mitteln) gelöst werden kann:

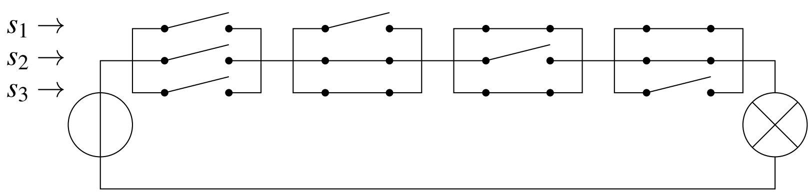
- Die Lampe eines Stiegenhauses kann von Schaltern im Keller, im Erdgeschoß und im ersten Stock bedient werden.
- Man möchte haben, dass sich bei jedem Druck auf einen der drei Schalter der Zustand der Lampe (leuchtet oder leuchtet nicht) ändert.
- Wie können die Leitungen ausgehend von einer Stromquelle durch die Schalter und die Lampe verlegt werden, um das zu erreichen?

Eine Lösung ist durch die folgende Schaltung gegeben:




Der Kreis links steht für die Stromquelle, der Kreis rechts für die Lampe. Durch die drei Schalter $s_1, s_2, s_3$ gehen jeweils vier Leitungen, in allen drei Schaltern sind immer zwei Leitungen geschlossen und zwei unterbrochen. Drückt man auf einen der Schalter, dann werden die zwei unterbrochenen Leitungen geschlossen und die zwei geschlossenen Leitungen unterbrochen.

Die Lösung ist nicht eindeutig, eine andere Lösung ist:




In dieser Schaltung gehen nicht wie in der ersten die übereinander gezeichneten Leitungsstücke durch jeweils einen der drei Schalter $s_1, s_2, s_3$, sondern die vier nebeneinander gezeichneten.

*Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG),* Heft 52, 2019, S. 83-92.

Mit Einsatz von mehr technischen Hilfsmitteln gibt es auch ganz andere Lösungen: Elektriker verwenden heutzutage für Stiegenhäuser zumeist Tasterschaltungen.

## 2. Beschreibung dessen, was man will, durch die „Schaltfunktion"

Durch jeden Schalter laufen eine oder mehrere Leitungen. Manche davon sind geschlossen (durch sie kann Strom fließen), die anderen unterbrochen (durch diese kann kein Strom fließen). Betätigt man den Schalter, dann werden alle unterbrochenen Leitungen geschlossen und alle geschlossenen Leitungen unterbrochen. Für jeden Schalter gibt es zwei Zustände, wir bezeichnen sie mit 0 und 1. Welcher Schalterzustand mit 0 und welcher mit 1 bezeichnet wird, ist gleich. Es muss aber eine Wahl getroffen werden.

Es gibt zwei Zustände der Lampe: das Licht leuchtet und das Licht leuchtet nicht. Wir bezeichnen auch diese mit 0 und 1 und vereinbaren, dass 1 „das Licht leuchtet" bedeutet.

Wir legen eine Reihenfolge der Schalter fest (wir nennen die drei Schalter dann $s_1, s_2$ und $s_3$) und bezeichnen bei jedem Schalter einen Zustand mit 0 und den anderen mit 1. Dann wird jede *Schalterstellung* durch ein Tripel der Zahlen 0 und 1 beschrieben. Zum Beispiel bedeutet $(0,1,1)$ :
Der erste Schalter ist im Zustand 0, der zweite und der dritte Schalter sind im Zustand 1. Die Menge aller möglichen Schalterstellungen ist dann die Menge $\{0,1\}^3$ aller Tripel von Zahlen 0 oder 1. Für 3 Schalter gibt es $2^3 = 8$ verschiedene Schalterstellungen: $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ und $(1,1,1)$.

Der Zusammenhang zwischen der Menge aller Schalterstellungen und der Menge aller Zustände der Lampe wird durch die *Schaltfunktion*

$$f : \{0,1\}^3 \longrightarrow \{0,1\}$$

$$f(x_1,x_2,x_3) := \text{ Zustand der Lampe, wenn die drei Schalter in Position } (x_1,x_2,x_3) \text{ sind}$$

beschrieben.

Der Graph der Funktion $f$ ist die Menge

$$\{\,((x_1,x_2,x_3), f(x_1,x_2,x_3))\,|\,x_1,x_2,x_3 \in \{0,1\}\,\} \subseteq \{0,1\}^3 \times \{0,1\}.$$

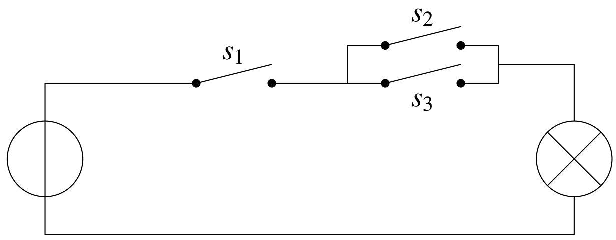
Die folgende Tabelle stellt den Graphen der Schaltfunktion $f$ dar. In jeder Zeile der Tabelle steht ein Element $((x_1,x_2,x_3), f(x_1,x_2,x_3))$ des Graphen von $f$. Wir haben dabei angenommen, dass $f(0,0,0) = 0$ ist. Da sich bei jedem Druck auf einen der Schalter der Zustand der Lampe ändern soll, sind dadurch die anderen Funktionswerte festgelegt.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1,x_2,x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

## 3. Einfach: Von der Schaltung zur Schaltfunktion

Ist eine Schaltung (mit mehreren Schaltern und einer Lampe) gegeben, kann die Schaltfunktion daraus leicht ermittelt werden. Man probiert alle Schalterstellungen aus und notiert jeweils, ob die Lampe leuchtet oder nicht.

Zum Beispiel ist die Schaltfunktion der Schaltung




die Funktion $g : \{0,1\}^3 \longrightarrow \{0,1\}$ mit $g(x_1,x_2,x_3) :=$ Zustand der Lampe, wenn die drei Schalter in Position $(x_1,x_2,x_3)$ sind.

Wenn wir die abgebildete Schalterstellung (durch keinen Schalter kann Strom fließen) mit $(0,0,0)$ bezeichnen, dann wird die Schaltfunktion $g$ (bzw. ihr Graph) durch die folgende Tabelle dargestellt:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $g(x_1,x_2,x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

## 4. Schwieriger: Von der Schaltfunktion zur Schaltung

Die umgekehrte Aufgabe, eine Schaltung zu bauen, die vorgegebene Eigenschaften hat, ist schwieriger. In diesem Fall ist die Schaltfunktion gegeben und eine Schaltung mit dieser Schaltfunktion gesucht.

In höheren Klassen der Sekundarstufe 2 sind die folgenden wichtigen Strategien zur Lösung mathematischer Probleme bereits bekannt:

- *Ersetze eine Aufgabe, deren Lösung nicht unmittelbar ersichtlich ist, durch eine einfachere Aufgabe, die aber dieselbe Lösung bzw. Lösungsmenge hat*: Diese Strategie hat Erfolg, wenn man nach mehreren Ersetzungsschritten bei einer Aufgabe landet, deren Lösung direkt abgelesen werden kann. Sie wird erfolgreich zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (ersetze das Zahlenpaar $(a,b)$ solange durch $(max(a,b) - min(a,b), min(a,b))$, bis die zwei Komponenten gleich sind, diese Zahl ist dann $\mathrm{ggT}(a,b)$ ) und zum Lösen von (Systemen von) Gleichungen durch „äquivalentes Umformen“(ersetze solange ein System von Gleichungen durch ein einfacheres, das dieselbe Lösungsmenge hat, bis man ein Gleichungssystem hat, dessen Lösungsmenge direkt ablesbar ist).

- *Löse zuerst einfache Aufgaben des vorliegenden Typs und versuche, daraus die Lösung der gegebenen Aufgabe zusammenzubauen*: Diese Strategie wird erfolgreich beim Lösen ganzzahliger linearer Gleichungen $ax + by = c \cdot \mathrm{ggT}(a,b)$ mit dem erweiterten Euklidischer Algorithmus angewendet. Man betrachtet dabei zuerst die ganzzahligen linearen Gleichungen $ax + by = a$ und $ax + by = b$, die offensichtlich $(1,0)$ und $(0,1)$ als Lösung haben, und erhält aus diesen zwei Lösungen die Lösung $(1,0) - m(0,1) = (1,-m)$ von $ax + by = a - mb$. Das wird mit den jeweils vorher gelösten zwei Gleichungen solange wiederholt, bis man eine Lösung $(u,v)$ von $ax + by = \mathrm{ggT}(a,b)$ erhält. Dann ist $(c \cdot u, c \cdot v)$ eine Lösung von $ax + by = c \cdot \mathrm{ggT}(a,b)$.
  Auch bei der Interpolation durch Polynomfunktionen mit Lagrange-Interpolation führt diese Strategie zum Erfolg.

Für unser Problem wählen wir die zweite Strategie: Finde zuerst Schaltungen für „einfache“ Schaltfunktionen und „baue dann damit die gesuchte Schaltung zusammen“.

Wir lassen uns dabei von der Vorgangsweise bei der Lagrange-Interpolation leiten und stellen diese daher im nächsten Abschnitt ausführlich dar.

## 5. Lagrange-Interpolation

Wir betrachten die folgende *Interpolationsaufgabe*:

- Gegeben sind eine natürliche Zahl $n$, paarweise verschiedene reelle Zahlen $x_0,\ldots,x_n$ und reelle Zahlen $y_0,\ldots,y_n$.
- Gesucht ist eine Polynomfunktion $L$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, deren Grad höchstens $n$ ist und deren Funktionswerte an den Stellen $x_0,\ldots,x_n$ gleich $y_0,\ldots,y_n$ sind (also $L(x_i) = y_i\ , \quad 0 \leq i \leq n$).

Diese Aufgabe ist leicht lösbar, wenn (für einen Index $i$) $y_i = 1$ ist und alle anderen $y_j$ gleich 0 sind. In diesem Fall ist

$$L_i \text{ mit } L_i(x) := \prod_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot (x - x_j)$$

die eindeutig bestimmte Lösung.

Um aus diesen Funktionen die Lösung der ursprünglichen Interpolationsaufgabe zu ermitteln, ist es notwendig, mit Funktionen rechnen zu können.

Mit Funktionen kann man rechnen, wenn man in ihrem Wertebereich (hier: $\mathbb{R}$) rechnen kann.
Für Funktionen $u$ und $v$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist

- die *Summe* $u+v$ die Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $(u+v)(x) := u(x)+v(x)$.
  Dabei ist $u(x)+v(x)$ die Summe der reellen Zahlen $u(x)$ und $v(x)$.
- das *Produkt* $u\cdot v$ die Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $(u\cdot v)(x) := u(x)\cdot v(x)$.
  Dabei ist $u(x)\cdot v(x)$ das Produkt der reellen Zahlen $u(x)$ und $v(x)$.

Für das Rechnen mit Funktionen gelten die gleichen Rechenregeln wie für ganze Zahlen (Assoziativgesetze, Kommutativgesetze, Distributivgesetz).

Die oben definierten Rechenoperationen Summe und Produkt von Funktionen treten in vielen anderen Bereichen der Mathematik auf, zum Beispiel in der Differenzialrechnung bei der Summen- und Produktregel, in der Stochastik als Summen von Zufallsvariablen, usw.

Mit $c$ bezeichnen wir nicht nur eine reelle Zahl $c$, sondern auch die konstante Funktion $c$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $c(x) := c$. So können wir die (Skalar-)Multiplikation von reellen Zahlen mit reellwertigen Funktionen als Spezialfall der Multiplikation von Funktionen auffassen.

Mit $L_i$ haben wir die Polynomfunktion bezeichnet, deren Grad kleiner oder gleich $n$ ist, deren Funktionswerte an den Stellen $x_j\ ,\ j \neq i$, gleich 0 sind und an der Stelle $x_i$ gleich 1 ist.

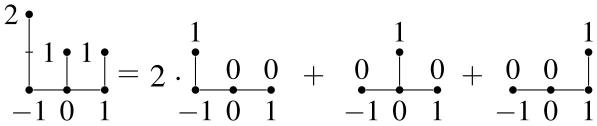
Die Polynomfunktion $y_i \cdot L_i$ ist dann eine Lösung der Interpolationsaufgabe mit $f(x_j) = y_j = 0$ für $j \neq i$ und $f(x_i) = y_i$.

Die Summe $y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + \ldots + y_n \cdot L_n$ dieser Funktionen $y_i \cdot L_i$, $0 \leq i \leq n$, ist die Lösung der ursprünglichen Interpolationsaufgabe, denn für $0 \leq j \leq n$ ist

$$(y_0 \cdot L_0 + \ldots + y_n \cdot L_n)(x_j) = (y_0 \cdot L_0)(x_j) + \cdots + (y_n \cdot L_n)(x_j) = y_0 \cdot L_0(x_j) + \cdots + y_n \cdot L_n(x_j) = y_j.$$

Beispiel:

Es sei $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ und $y_0 = 2, y_1 = 1, y_2 = 1$.



Für alle reellen Zahlen $x$ ist

$$L_0(x) = \frac{1}{2}x(x-1), \quad L_1(x) = -(x+1)(x-1), \quad L_2(x) = \frac{1}{2}x(x+1).$$

Die Lösung ist $L := 2L_0 + L_1 + L_2$, also $L(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

## 6. Exkurs: Lagrange-Interpolation und „Intelligenz“

In diversen „Intelligenz-“ oder Zulassungstests wird verlangt, „Zahlenreihen fortzusetzen“, das heißt: Gegeben sind reelle Zahlen $y_0, \ldots, y_n$ und die Testperson soll ein Bildungsgesetz für diese Folge finden und damit das Folgenglied $y_{n+1}$ angeben.

Diese Aufgabe kann als Interpolationsaufgabe wie oben gelöst werden:
Gegeben sind $x_0 = 1, x_1 = 2, \ldots, x_n = n+1$ und die reellen Zahlen $y_0, \ldots, y_n$.
Gesucht ist eine Polynomfunktion $L$ mit $L(x_j) = y_j$ , $\quad 0 \leq j \leq n$ .

Setze dann $y_0, \ldots, y_n$ mit $y_{n+1} := L(n+2)$ fort.

Man kann sich fragen, ob eine Aufgabe, die ein Computer lösen kann, zur Messung von (menschlicher) Intelligenz geeignet ist. Schwerwiegender ist aber, dass die Fortsetzung der Zahlenfolge nicht eindeutig ist, wenn an das Bildungsgesetz keine zusätzlichen Bedingungen gestellt werden (z. B. dass es durch eine Polynomfunktion beschrieben wird, deren Grad höchstens $n$ ist). Es gibt ohne eine solche Bedingung unendlich viele mögliche „Bildungsgesetze“und damit beliebig viele richtige Antworten auf diese Testfrage.

Zum Beispiel kann die Folge $1,2,3$ durch 4 (nach Wahl von $L$ mit $L(x) = x$) fortgesetzt werden, aber auch durch 10 ($L$ mit $L(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x$) oder 7 (nach Wahl von $L$ mit
$L(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3) + x$ ).

Häufig wird eingewendet, dass die meisten Testpersonen sich für 4 entscheiden werden. Damit erhält aber die Testfrage eine neue Bedeutung: es wird erhoben, ob jemand so denkt wie die meisten oder ob die Testperson vom „mainstream“ abweicht.

## 7. Rechnen in $\mathbb{Z}_2 := \{0,1\}$

Wir definieren auf der Menge $\{0,1\}$ die folgenden Rechenoperationen:

- Addition: $0+0 := 0,\ 0+1 := 1,\ 1+0 := 1,\ 1+1 := 0$

- Multiplikation: $0 \cdot 0 := 0,\ 0 \cdot 1 := 0,\ 1 \cdot 0 := 0,\ 1 \cdot 1 := 1.$

Wenn wir $\{0,1\}$ mit diesen zwei Rechenoperationen betrachten, schreiben wir $\mathbb{Z}_2$ (sprich: „Z zwei“ oder „Z modulo 2“) anstatt $\{0,1\}$. In $\mathbb{Z}_2$ gelten die gleichen Rechenregeln wie für reelle Zahlen (Assoziativgesetze, Kommutativgesetze, Distributivgesetz).

Unsere Schaltfunktion $f : \mathbb{Z}_2^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ ändert bei jeder Änderung von einer der drei Komponenten den Funktionswert und $f(0,0,0) = 0$. Daher kann $f$ zum Beispiel durch

$$f(x_1,x_2,x_3) := x_1 + x_2 + x_3$$

beschrieben werden.
Es ist dann $f(1,1,0) = 1+1+0 = 0$ und $f(1,1,1) = 1+1+1 = 1$.

## 8. Die einfachen Fälle: Serienschaltung

Die 8 Schaltfunktionen $f_{ijk}$ mit $i,j,k \in \{0,1\}$ von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ mit

$$f_{ijk}(x_1,x_2,x_3) = (x_1+i+1)(x_2+j+1)(x_3+k+1)$$

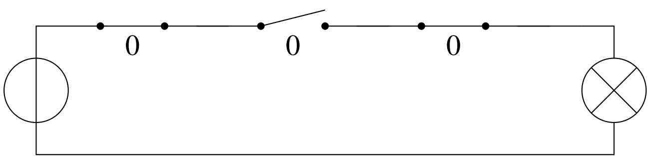
haben an einer einzigen Stelle, nämlich $(i,j,k)$ den Funktionswert 1 und an allen (sieben) anderen Stellen den Funktionswert 0. Dabei ist zu beachten, dass die Summe in $\mathbb{Z}_2$ gebildet wird, insbesondere $1+1=0$ ist.

Zum Beispiel ist
$f_{001}(x_1,x_2,x_3) = (x_1+1)(x_2+1)(x_3)$,
$f_{010}(x_1,x_2,x_3) = (x_1+1)x_2(x_3+1)$ und
$f_{111}(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$.
Die Tabelle von $f_{010}$ ist

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f_{010}(x_1,x_2,x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Bei der Schaltfunktion $f_{010}$ darf die Lampe nur bei der Schalterstellung $(0,1,0)$ leuchten. Die entsprechende Schaltung ist die *Serienschaltung* der drei Schalter, wobei durch den ersten bzw. zweiten bzw. dritten Strom fließt, wenn er im Zustand 0 bzw. 1 bzw. 0 ist.

Bild:




## 9. Rechnen mit Funktionen von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$

Mit Funktionen kann man rechnen, wenn man in ihrem Wertebereich (hier: $\mathbb{Z}_2$) rechnen kann.
Für Funktionen $u$ und $v$ von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ ist

- die *Summe* $u+v$ die Funktion von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ mit $(u+v)(x) := u(x)+v(x)$.
  Dabei ist $u(x)+v(x)$ die Summe der Zahlen $u(x)$ und $v(x)$ in $\mathbb{Z}_2$.
- das *Produkt* $u \cdot v$ die Funktion von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ mit $(u \cdot v)(x) := u(x) \cdot v(x)$.
  Dabei ist $u(x) \cdot v(x)$ das Produkt der Zahlen $u(x)$ und $v(x)$ in $\mathbb{Z}_2$.

Für das Rechnen mit Funktionen gelten die gleichen Rechenregeln wie für ganze Zahlen (Assoziativgesetze, Kommutativgesetze, Distributivgesetz).

Mit $p_i$ ($i = 1, 2$ oder 3) bezeichnen wir die $i$-te Projektion von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$:

$$p_i(x_1, x_2, x_3) := x_i \,.$$

Dann ist $f$ mit $f(x_1,x_2,x_3) := x_1+x_2+x_3$ die Summe der 3 Projektionen: $f = p_1+p_2+p_3$.

Mit 0 und 1 bezeichnen wir nicht nur die Elemente $0, 1 \in \mathbb{Z}_2$, sondern auch die konstanten Funktionen 0 und 1 von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$:

$$0(x_1,x_2,x_3) := 0, \quad 1(x_1,x_2,x_3) := 1\,.$$

Jede Funktion $h$ von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ kann als Summe von einigen der 8 Funktionen $f_{ijk}$ geschrieben werden. Es ist leicht nachzuprüfen, dass

$$h = \sum_{(i,j,k)\in\mathbb{Z}_2^3} h(i,j,k) \cdot f_{ijk}$$

ist.

Zum Beispiel ist $p_1 = f_{100}+f_{101}+f_{110}+f_{111}$, $p_2 = f_{010}+f_{011}+f_{110}+f_{111}$,
$p_3 = f_{001}+f_{011}+f_{101}+f_{111}$ und

$$f = \sum_{(i,j,k)\in\mathbb{Z}_2^3} f(i,j,k) \cdot f_{ijk} =$$

$$= f(0,0,0) \cdot f_{000} + f(0,0,1) \cdot f_{001} + f(0,1,0) \cdot f_{010} + \cdots + f(1,1,1) \cdot f_{111} =$$

$$= f_{100}+f_{010}+f_{001}+f_{111}\,.$$

Weil die Funktion $f_{ijk} = (p_1+i+1) \cdot (p_2+j+1) \cdot (p_3+k+1)$ ist (dabei werden $i+1$, $j+1$ und $k+1$ als konstante Funktionen betrachtet), kann jede Funktion $h$ von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ auch als Summe von Produkten der Funktionen $0, 1, p_1, p_2$ und $p_3$ angeschrieben werden.

Zum Beispiel ist $f_{111} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ und $f_{010} = (p_1+1) \cdot p_2 \cdot (p_3+1)$.

Daher ist

$$f = f_{100}+f_{010}+f_{001}+f_{111} =$$

$$= p_1 \cdot (p_2+1) \cdot (p_3+1) + (p_1+1) \cdot p_2 \cdot (p_3+1) + (p_1+1) \cdot (p_2+1) \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3\,.$$

Man kann auf diese Weise auch die in Abschnitt 3 definierte Schaltfunktion $g$ als Polynomfunktion von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ betrachten:

$$g = f_{110}+f_{101}+f_{111} = p_1 \cdot p_2 \cdot (p_3+1) + p_1 \cdot (p_2+1) \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 =$$

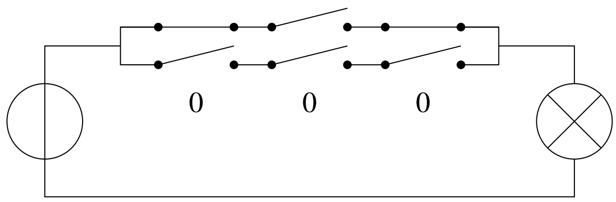
$$= p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3\,,$$

also ist für alle $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}_2^3$

$$g(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2x_3\,.$$

## 10. Zusammenbau: Parallelschaltung von Serienschaltungen

Bei der Schaltfunktion $f_{010} + f_{111}$ leuchtet die Lampe genau dann, wenn die Schalterstellungen $(0,1,0)$ oder $(1,1,1)$ sind. Die entsprechende Schaltung ist die im folgenden Bild dargestellte *Parallelschaltung* der zwei Serienschaltungen der drei Schalter. Die Schalterstellung in diesem Bild ist $(0,0,0)$.




Bei der von uns betrachteten Schaltfunktion $f = f_{100} + f_{010} + f_{001} + f_{111}$ leuchtet die Lampe bei den Schalterstellungen $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ oder $(1,1,1)$ und bei allen anderen leuchtet sie nicht. Durch Parallelschaltung der entsprechenden vier Leitungen durch die drei Schalter erhalten wir also eine Schaltung mit Schaltfunktion $f$ und zwar die erste Schaltung von Abschnitt 1.

Das in Abschnitt 1 formulierte Problem ist damit gelöst. Im nächsten Abschnitt geben wir eine zweite Lösung an. Dazu und zur übersichtlichen Darstellung des Lösungsweges für beliebige Schaltfunktionen führen wir Schreibweisen ein, die in der Schaltalgebra üblich sind.

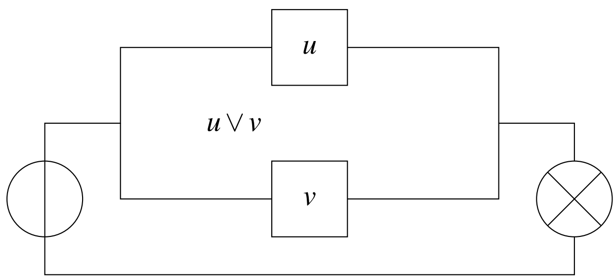
## 11. Von der Schaltfunktion zur Schaltung

Für Funktionen $u$ und $v$ von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$ definieren wir

$$u \wedge v := u \cdot v, \quad \neg u := u + 1, \quad u \vee v := u + v + u \cdot v$$

Ist $u \cdot v = 0$, z.B. wenn $u = f_{ijk}$ und $v = f_{pqr}$ mit $(i,j,k) \neq (p,q,r) \in \mathbb{Z}_2^3$, dann ist $u \vee v = u + v$.

Man prüft leicht nach: Sind $u$ und $v$ zwei Schaltfunktionen für Schaltungen mit denselben Schaltern, dann ist $u \wedge v$ die Schaltfunktion der Serienschaltung und $u \vee v$ die Schaltfunktion der Parallelschaltung dieser zwei Schaltungen.



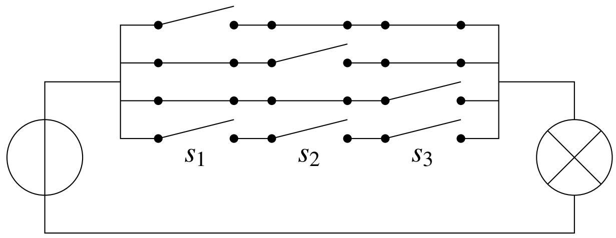

Denn: Die Lampe in der Parallelschaltung leuchtet bei der Schalterstellung $(x_1,x_2,x_3)$ genau dann, wenn $u(x_1,x_2,x_3) = 1$ ist oder $v(x_1,x_2,x_3) = 1$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $u(x_1,x_2,x_3) + v(x_1,x_2,x_3) + u(x_1,x_2,x_3) \cdot v(x_1,x_2,x_3) = 1$ ist. Daher ist $u \vee v = u + v + u \cdot v$.
Die Lampe in der Serienschaltung leuchtet bei der Schalterstellung $(x_1,x_2,x_3)$ genau dann, wenn $u(x_1,x_2,x_3) = 1$ ist und $u(x_1,x_2,x_3) = 1$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $u(x_1,x_2,x_3) \cdot v(x_1,x_2,x_3) = 1$ ist. Daher ist $u \wedge v = u \cdot v$.

Mit dieser Schreibweise ist

$$f = p_1 \cdot (p_2 + 1) \cdot (p_3 + 1) + (p_1 + 1) \cdot p_2 \cdot (p_3 + 1) + (p_1 + 1) \cdot (p_2 + 1) \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 =$$

$$= \big(p_1 \cdot (\neg p_2) \cdot (\neg p_3)\big) \vee \big((\neg p_1) \wedge p_2 \wedge (\neg p_3)\big) \vee \big((\neg p_1) \wedge (\neg p_3) \wedge p_3\big) \vee \big(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3\big) \;.$$

Diese Darstellung von $f$ heißt ihre *disjunktive Normalform*. Aus ihr kann abgelesen werden, wie die gesuchte Schaltung als Parallelschaltung von Serienschaltungen gebaut werden kann.

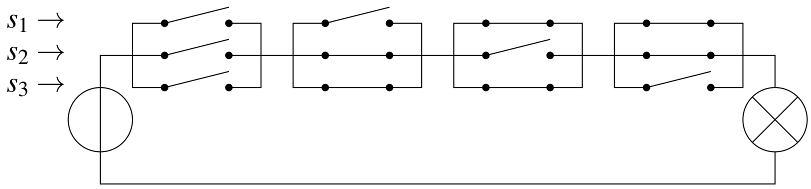



Die Darstellung

$$f = (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee (\neg p_2) \vee (\neg p_3)) \wedge ((\neg p_1) \vee p_2 \vee (\neg p_3)) \wedge$$

$$\wedge ((\neg p_1) \vee (\neg p_2) \vee p_3)$$

von $f$ ist ihre *konjunktive Normalform* von $f$. Aus ihr kann abgelesen werden, wie die gesuchte Schaltung als Serienschaltung von Parallelschaltungen gebaut werden kann.




## 12. Eine Bemerkung zu Normalformen

Es gibt $2^8$ Funktionen von $\mathbb{Z}_2^3$ nach $\mathbb{Z}_2$, jede ist Linearkombination (mit Koeffizienten 0 oder 1) der 8 Monome

$$1,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_1 \cdot p_2,\ p_1 \cdot p_3,\ p_2 \cdot p_3,\ p_1 \cdot p_2 \cdot p_3\,.$$

Die Darstellung von $f$ als Summe (bzw. Linearkombination) von Monomen ist $p_1 + p_2 + p_3$, sie ist zum Auswerten der Funktion $f$ gut geeignet. Dazu sind die konjunktive oder disjunktive Normalform weniger gut geeignet. Diese haben aber den Vorteil, dass man daraus direkt ablesen kann, wie die entsprechende Schaltung aussehen muss, wozu wiederum die Darstellung $f = p_1 + p_2 + p_3$ nicht gut geeignet ist.

Es hängt also von der jeweiligen Fragestellung ab, ob eine Darstellung „einfacher“ oder „besser“ ist als eine andere. Das sollte bereits in der Sekundarstufe 1 bedacht werden und Aufgaben der Art „Vereinfache ...“ vermieden oder präziser formuliert werden. Zum Beispiel ist es gar nicht klar, ob $a^2 - b^2$ zu $(a+b)(a-b)$ vereinfacht werden soll oder umgekehrt.


Anschrift der Verfasser

Franz Pauer und Florian Stampfer

Fakultät für LehrerInnenbildung
Institut für Fachdidaktik
Universität Innsbruck
Technikerstraße 25
A – 6020 Innsbruck
Österreich

franz.pauer@uibk.ac.at, florian.stampfer@uibk.ac.at